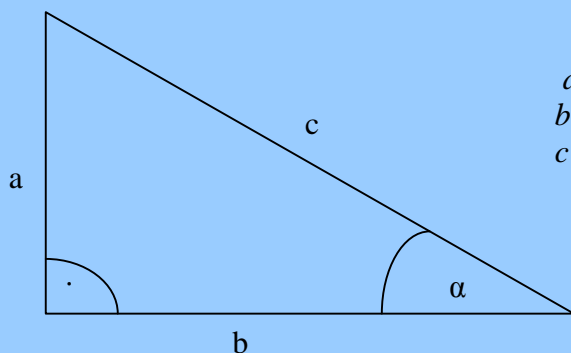


## 8. 1. DEFINICJE FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH

### Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego



*a* – przyprostokątna naprzeciw  $\alpha$   
*b* – przyprostokątna przy  $\alpha$   
*c* – przeciwprostokątna

$\sin \alpha$  - czytaj: sinus  $\alpha$

$\cos \alpha$  - czytaj: kosinus  $\alpha$

$\operatorname{tg} \alpha$  - czytaj: tangens  $\alpha$

$\operatorname{ctg} \alpha$  - czytaj: kotangens  $\alpha$

$$\sin \alpha = \frac{\text{przyprostokątna}_{\text{naprzeciw}} \alpha}{\text{przeciwprostokątna}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{przyprostokątna}_{\text{przy}} \alpha}{\text{przeciwprostokątna}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{przyprostokątna}_{\text{naprzeciw}} \alpha}{\text{przyprostokątna}_{\text{przy}} \alpha} = \frac{a}{b}$$

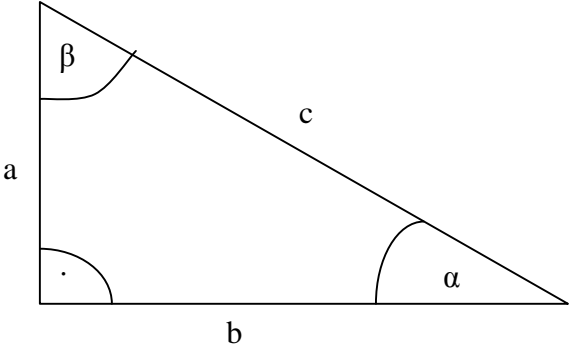
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{przyprostokątna}_{\text{przy}} \alpha}{\text{przyprostokątna}_{\text{naprzeciw}} \alpha} = \frac{b}{a}$$

### Twierdzenie Pitagorasa

Suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Przykład 8.1.1.** Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 4 i 2.

Rozwiązanie	Komentarz
 <p><b>Dane:</b>  <math>a = 2</math>  <math>b = 4</math></p> <p><b>Szukane:</b>  <math>\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha</math>  <math>\sin \beta, \cos \beta, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{ctg} \beta</math></p>	<p>Analiza zadania</p>
$a^2 + b^2 = c^2$ $2^2 + 4^2 = c^2$ $4 + 16 = c^2$ $c^2 = 20$ $c = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$	<p>Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy przeciwprostokątną c.</p>
$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$	<p>Korzystając w definicji funkcji trygonometrycznych kąta <math>\alpha</math>, obliczamy <math>\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha</math></p> <p>Pamiętamy o usunięciu niewymierności z mianownika przy wyrażeniach <math>\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}</math></p>
$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$ $\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	<p>Korzystając w definicji funkcji trygonometrycznych kąta <math>\beta</math>, obliczamy <math>\sin \beta, \cos \beta, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{ctg} \beta</math></p> <p>Zauważmy, że  <math>b</math> – przyprostokątna naprzeciw <math>\beta</math>  <math>a</math> – przyprostokątna przy <math>\beta</math>  <math>c</math> – przeciwprostokątna</p>

## Związki między funkcjami trygonometrycznymi kątów ostrych w trójkącie prostokątnym

Dla kąta ostrego  $\alpha$  w trójkącie prostokątnym zachodzą związki:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

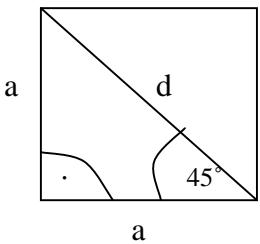
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$

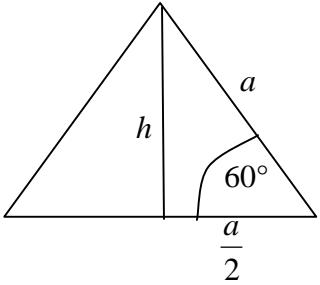
Przykład 8.1.2. Oblicz wartość wyrażenia:  $\sin 17^\circ - \cos 73^\circ$

Rozwiązanie	Komentarz
$\sin 17^\circ = \sin(90^\circ - 73^\circ) = \cos 73^\circ$	Korzystając ze wzoru $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ zamieniamy $\sin 17^\circ$ na kosinus.
$\sin 17^\circ - \cos 73^\circ = \cos 73^\circ - \cos 73^\circ = 0$	Obliczmy wartość wyrażenia $\sin 17^\circ - \cos 73^\circ$

Przykład 8.1.3. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $45^\circ$ .

Rozwiązanie	Komentarz
	<p>Kąt <math>45^\circ</math> tworzy przekątna kwadratu z jego bokiem.</p> <p>Przekątna dzieli kwadrat na dwa trójkąty prostokątne.</p>
$a^2 + a^2 = d^2$ $2a^2 = d^2$ $d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$	Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wyprowadzamy wzór na przekątną kwadratu
$\sin 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$ $\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$	<p>Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych, obliczamy <math>\sin 45^\circ, \cos 45^\circ, \operatorname{tg} 45^\circ, \operatorname{ctg} 45^\circ</math></p> <p>Pamiętamy o usunięciu niewymierności z mianownika przy wyrażeniach <math>\frac{1}{\sqrt{2}}</math>,</p>

Przykład 8.1.4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $60^\circ$ .

Rozwiązanie	Komentarz
	<p>Kąt <math>60^\circ</math> jest kątem wewnętrznym w trójkącie równobocznym. Wysokość dzieli trójkąt na dwa trójkąty prostokątne.</p>
$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ $h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$ $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$ $h^2 = \frac{3}{4}a^2$ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	<p>Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wyprowadzamy wzór na wysokość trójkąta równobocznego.</p>
$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{3}$ $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	<p>Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych, obliczamy <math>\sin 60^\circ</math>, <math>\cos 60^\circ</math>, <math>\operatorname{tg} 60^\circ</math>, <math>\operatorname{ctg} 60^\circ</math></p> <p>Pamiętamy o usunięciu niewymierności z mianownika przy wyrażeniach <math>\frac{1}{\sqrt{3}}</math>,</p>

Przykład 8.1.5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $30^\circ$ .

Rozwiązanie	Komentarz
$\sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg 30^\circ = tg(90^\circ - 60^\circ) = ctg 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $ctg 30^\circ = ctg(90^\circ - 60^\circ) = tg 60^\circ = \sqrt{3}$	Korzystając ze wzorów $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ $tg \alpha = ctg(90^\circ - \alpha)$ $ctg \alpha = tg(90^\circ - \alpha)$ zamieniamy funkcje trygonometryczne kąta $30^\circ$ na funkcje trygonometryczne kąta $60^\circ$ . .

### Wartości funkcji trygonometrycznych niektórych kątów

$x$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

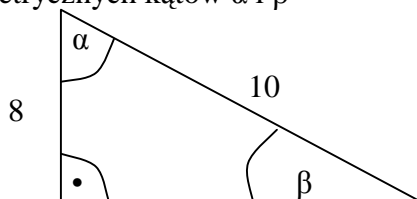
Przykład 8.1.6. Wykaż, że prawdziwa jest równość:

$$\frac{3\sin 30^\circ + 2\sin 60^\circ}{tg 30^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{3}{tg 45^\circ}$$

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{1}$ $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3} = 3$ $\frac{6}{2\sqrt{3} + 3} = 3$ $\frac{6}{2} = 3$	Do równości podstawiamy wartości funkcji trygonometrycznych: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $tg 45^\circ = 1$ .
$\frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2} = 3$ $\frac{2\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{6} = 3$ $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6}{3 + 2\sqrt{3}} = 3$ $3 = 3$	

## ĆWICZENIA

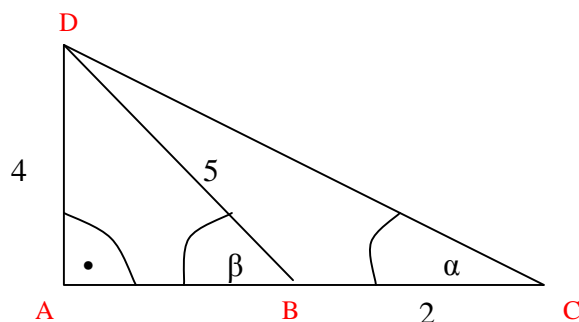
Ćwiczenie 8.1.1. (3pkt.) Na podstawie rysunku wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów  $\alpha$  i  $\beta$



schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie długości drugiej przyprostokątnej	1
2	Podanie wartości $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$	1
3	Podane wartości $\sin \beta, \cos \beta, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{ctg} \beta$	1

Ćwiczenie 8.1.2. (4pkt.) Na podstawie rysunku wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów  $\alpha$  i  $\beta$



schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie długości boków AB i AC	1
2	Podanie długości boku CD	1
3	Podanie wartości $\sin \beta, \cos \beta, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{ctg} \beta$	1
4	Podanie wartości $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$	1

Ćwiczenie 8.1.3. (3pkt.) Oblicz wartość liczbową wyrażenia:  $\frac{1 + 2 \sin 60^\circ}{4 \cos 45^\circ} + \frac{1 - \sin 30^\circ}{2 \cos 45^\circ}$ .

**schemat oceniania**

<b>Numer odpowiedzi</b>	<b>Odpowiedź</b>	<b>Liczba punktów</b>
1	Podanie wartości liczbowej wyrażenia $\frac{1 + 2 \sin 60^\circ}{4 \cos 45^\circ}$	1
2	Podanie wartości liczbowej wyrażenia $\frac{1 - \sin 30^\circ}{2 \cos 45^\circ}$	1
3	Podanie wartości wyrażenia $\frac{1 + 2 \sin 60^\circ}{4 \cos 45^\circ} + \frac{1 - \sin 30^\circ}{2 \cos 45^\circ}$ z usuniętą niewymiernością z mianownika.	1